On the Strong Novikov Conjecture of Locally Compact Groups for Low Degree Cohomology Classes(Abstract_要旨)

Fukumoto, Yoshiyasu

学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　名	ふくもと　よしやす 福本　佳泰
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　博　第　　　号
学位授与の日付	平成　年　月　日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研 究 科・専 攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

On the Strong Novikov Conjecture of Locally Compact Groups for Low Degree Cohomology Classes

((低次元コホモロジー類に対する局所コンパクト群の強ノビコフ予想について))

論 文 調 査 委 員	(主査)　加藤　毅　教　授 Gennadi Kasparov　教　授 上　正明　教　授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏 名	福本　佳泰
論文題目	On the Strong Novikov Conjecture of Locally Compact Groups for Low Degree Cohomology Classes		

（論文内容の要旨）

G を局所コンパクトユニモジュラーハウスドルフ群とする．X を，$H_1(X,\mathbb{R})=0$ を満たす偶数次元向き付けられた完備 Riemann 多様体で，G が proper かつ co-compact に作用するとする．典型的な例は，M が閉多様体で，$X=\widetilde{M}$ がその普遍被覆，$G=\pi_1(M)$ が基本群の場合である．$\mathbf{V}$ を X 上の滑らかな複素 Hermite$G$-ベクトル束とする．

主結果は，同変指数写像の部分的な有理単射性に関するもので，そこからスカラー曲率に関する応用が得られる．

$A: L^2(\mathbf{V}) \to L^2(\mathbf{V})$ を，G-不変な楕円型作用素とすると，A は同変 K-ホモロジーの元 $[A] \in KK^G(C_0(X),\mathbb{C})$ を定める．指数写像を $\mu_G : KK^G(C_0(X),\mathbb{C}) \to K_0(C^*(G))$ とすると，ある条件の下で，$\mu_G([A]) \neq 0$ が成立する．

この条件とは，X の 2 次コホモロジーとのペアリングが消えない事である．特別な場合として，M が閉多様体で，$X=\widetilde{M}$ を普遍被覆空間とし，$G=\pi_1(M)$ とする．L が M 上の直線束であって，BG から誘導されているならば，以下のことが成立する．

$$< ch[L], ch[A] > = < ch[L]ch[\sigma_A], [M] > \neq 0 \quad \text{ならば} \quad \mu_G([A]) \neq 0$$

以下にある条件について説明をする．L を G-Hermitian 直線束とし，．その同変でない第 1 Chern 類は消えているとする； $c_1(L)=0 \in H^2(X;\mathbb{R})$．$X$ 上の G-ベクトル束 L について $[L]$ と $[A]$ とのペアリング $< [L],[A] >_G$ を以下で定義する；

$$< [L],[A] >_G := \int_X c(x) Td(T_{\mathbb{C}}X) \wedge ch(\sigma_A) \wedge ch(L) \in \mathbb{R}.$$

ここで，$c \in C_c(X)$ は cut-off function である．すなわち $c \geq 0$ かつ supp $(c) \subset X$ はコンパクトで，任意の $x \in X$ に対して $\int_G c(\gamma^{-1}x)d\gamma = 1$ が成り立つ．M が閉多様体で，$X=\widetilde{M}$，$G=\pi_1(M)$ の場合，この値は上述したペアリングに一致する．

主定理は以下のものである．上のような X 上の直線束 L であって，$< [L],[A] >_G \neq 0$ を満たすものが存在すれば，$\mu_G([A]) \neq 0$ を満たす．

このペアリングは位相空間の（コ）ホモロジーでとるのではなく，同変 K-理論でとる．計算には H. Wang による指数公式を用いる．定義は，申請者自身によるものだが，離散群の自由な作用の場合は，B. Hanke と T. Schick による先行研究の仮定に一致する．

証明の鍵となるステップは，曲率が徐々に平坦に近づく直線束の族の構成，そしてそのベクトル束でひねった A の指数の計算である．ただし，$t \in [0,1]$ に対して almost flat bundles の族 L_t を構成する際，各 L_t ごとに異なる群の $U(1)$-中心拡大の族 G^t を取る必要がある．従って，各 L_t でひねった指数が異なる空間 $K_0(C^*(G^t))$ に値を持つため，単純にそれらと指数写像の像 $\mu_G([A]) \in K_0(C^*(G))$ を比較することは出来ない．そこで，L_t ひとつひとつについて指数を計算するだけでなく，$t = 1/k$ の列に対して $L_{1/k}$ をすべて合わせた無限次元束 $\prod L_{1/k}$ でひねった指数を考える．その指数は適切な C^*環 の K 群に値を持つように定義される．更に $[A]$ 自身の指数も同じ K 群に値を持つように定義することで，両者を比較するという手法を導入した．曲率が平坦に近づくという性質は，この指数の定義に用いられるだけではなく，L_t を用いて真に平坦な無限次元束 $\prod L_{1/k}/\bigoplus L_{1/k}$ が構成できるという議論を行うために必要とされる．この平坦性は，「$\mu_G([A]) = 0$ と仮定すると，平坦束でひねった指数も 0 である」という議論を適用するために使われる．この指数も，適切に定義された C^* 環の K 群に値を持つ．この平坦束は，有限個の成分に関する情報をすべて失っているが，どのように平坦束に近づくかという情報を持っている．その情報と L_t の構成の仕方を見ると，もとの L でひねった指数の情報を得ることができる．この手法は B. Hanke と T. Schick の先行研究による離散群の場合の拡張になっている．

主定理の応用として，Proper action の場合の Gromov-Lawson-Rosenberg 予想を，以下のように低次元コホモロジーに対して与えた．X が更に spin 多様体でスカラー曲率がいたるところ正であると仮定する．このとき，上のような直線束 L に対して，同変 Higher $\hat{\mathbf{A}}$-genus は消える．

$$\int_X c(x)\hat{\mathbf{A}}(TX) \wedge ch(L) = 0.$$

M が閉多様体で，$X = \widetilde{M}$，$G = \pi_1(M)$ の場合，この値は M の L に関する Higher $\hat{\mathbf{A}}$-genus に一致する．

系を導くには，作用素 A を spin 構造から定まる標準的な Dirac 作用素とし，定理の対偶を用いる．X のスカラー曲率がいたるところ正であるから A が正作用素となり，$\mu_G([A]) = 0$ である．従って任意の直線束 L に対して，$< [L], [A] >_G = 0$ である．一方で左辺を計算すると，同変版の Higher $\hat{\mathbf{A}}$-genus になる．

以上が本論文の主要結果である。

(論文審査の結果の要旨)

＊＊＊＊＊

楕円型作用素の指数は，Atihay-Singer 指数定理により位相的な積分表示を持つ．その高次の指数として，基本群を局所係数とした楕円型作用素の指数が作用素代数の K 群の元として与えられる．基本群はその多様体の微分構造と本質的に関わることが古典的な手術理論によって知られており，そこから派生する，高次の符号数のホモトピー不変性が予想されていて Novikov 予想と呼ばれる．この予想は様々な部分的な解があるものの，完全解決には至っていない．これまでのほとんどの手法は，高次の指数を用いるもので，それを与える指数写像の有理単射性から従うことが知られている．さらにその性質から，スカラー曲率に関する Gromov-Lawson-Rosenberg 予想が従うことも知られていた．

本論文の主結果は，離散とは限らない局所コンパクト群が多様体に proper かつ co-compact に作用している状況において，指数写像の像が或る条件のもとでは消えない，というものである．問題の背景には上述した Novikov 予想や Gromov-Lawson-Rosenberg 予想があり，微分トポロジーに於ける基本的な問題に関わる重要なテーマであると言える．

これまで与えられてきた多くの研究結果では G は離散群であったが，福本氏は G を離散とは限らない局所コンパクト (locally compact) ハウスドルフ群が作用する場合を扱った．しかし離散群の場合にこれまで知られていた手法をそのまま拡張しようとすると，解析的な困難がすぐに立ちはだかる．福本氏は，独自のアイデアを用いることで本質的な困難を乗り越えた．特にほとんど平坦な直線束の族を有理関数のゼロ値の有限個数性に絡めて示す方法は，彼のオリジナルなものであり，その手法自体も興味深いものである．

これまで多くの専門家が次元を持つ群を取り上げなかった理由の一つに，特性数のホモトピー不変性や正スカラー曲率の非存在への応用がなかったことによる．福本氏の研業績は，解析的な手法を一般化しただけではなく，正のスカラー曲率が入らない新たな状況を示したことで，Gromov-Lawson-Rosenberg 予想への新たな応用を与えた．正の次元を持つ群作用の指数定理の展開に優れた進展を与えたと言える．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 28 年 8 月 29 日に試問を行った結果、合格と認めた。